

Филиал Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Иркутской области «Иркутский колледж автомобильного транспорта и дорожного строительства» в поселке Улькан

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

ОУД.05 «Математика»

по программе подготовки квалифицированных рабочих и служащих
15.01.31 Мастер контрольно-измерительных приборов и автоматики

Улькан, 2021

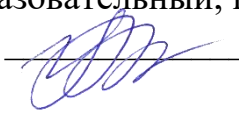
Методические указания разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины Математика по программе подготовки квалифицированных рабочих и служащих **15.01.31 Мастер контрольно-измерительных приборов и автоматики**

Организация-разработчик: Филиал Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Иркутской области «Иркутский колледж автомобильного транспорта и дорожного строительства» в поселке Улькан

Составитель:

Маринина Валентина Александровна, преподаватель 1КК.

Рассмотрены и одобрены на заседании методической комиссии
«Общеобразовательный, профессиональный цикл»

Методист  Баженова И.В.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данные методические указания к выполнению внеаудиторных самостоятельных работ обучающихся являются частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Математика» по профессии 15.01.31 Мастер контрольно-измерительных приборов и автоматики.

Выполнение внеаудиторных самостоятельных работ обучающихся направлено на закрепление полученных в ходе изучения тем знаний и реализацию выполнения требований. Самостоятельные занятия повышают качество знаний, значительно усиливают интерес к изучению дисциплины, помогают обучающимся полнее осознать практическую значимость естественных наук.

Во всех внеаудиторных самостоятельных работах учитывается полнота и качество выполнения предложенных заданий.

Внеаудиторные самостоятельные работы обучающихся позволяют им приобрести опыт познавательной и практической деятельности, а также способствуют освоению общих компетенций по Федеральному Государственному образовательному стандарту СПО:

- ОК1. Проявлять готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.
- ОК3. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач.
- ОК4. Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководителями.

Количество часов на освоение рабочей программы учебной дисциплины: обязательной учебной нагрузки студента 258 часов, в том числе: 12 часов внеаудиторных самостоятельных работ.

Перечень внеаудиторных самостоятельных работ

№ п/п	Название самостоятельной работы	Кол-во часов
№ 1	Написание конспекта по теме: «Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Подготовка к опросу.	4
№ 2	Подготовка доклада по теме: «Интерпретация результата, учет реальных ограничений».	4
№ 3	Выполнение расчетного задания «Уравнения и неравенства».	4

СОДЕРЖАНИЕ

1. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОПРОСУ	6
2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ДОКЛАДОВ	8
3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ПРЕЗЕНТАЦИЙ	10
4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ.....	13
5. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ	17

1. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОПРОСУ

Для подготовки к устному опросу обучающемуся необходимо ознакомиться с материалом, посвященным теме практического занятия, в учебнике или другой рекомендованной литературе, записях с лекционных занятий, обратить внимание на усвоение основных понятий дисциплины, выявить неясные вопросы и подобрать дополнительную литературу для их освещения, составить тезисы выступления по отдельным проблемным аспектам.

Тема и вопросы к практическим занятиям, вопросы для самоконтроля содержатся в настоящей рабочей программе и доводятся до обучающихся заранее. Эффективность подготовки обучающихся к устному опросу зависит от качества ознакомления с рекомендованной литературой.

В среднем, подготовка к устному опросу по одному занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимися своей самостоятельной работы.

Критерии оценивания

Развёрнутый ответ обучающегося должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения, правила в конкретных случаях.

При оценке ответа обучающегося надо руководствоваться следующими критериями, учитывать:

- 1) полноту и правильность ответа;
- 2) степень осознанности, понимания изученного;
- 3) языковое оформление ответа.

Оценка "5" ставится, если обучающийся:

- 1) полно излагает изученный материал, даёт правильное определенное математических понятий;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

Оценка "4" ставится, если обучающийся даёт ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки "5", но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

Оценка "3" ставится, если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка "2" ставится, если обучающийся обнаруживает незнание большей части соответствующего раздела изучаемого материала, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал.

Оценка "2" отмечает такие недостатки в подготовке ученика, которые являются серьёзным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Оценка ("5", "4", "3") может ставиться не только за единовременный ответ (когда на проверку подготовки обучающегося отводится определенное время), но и за рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных обучающимся на протяжении урока (выводится поурочный балл), при условии, если в процессе урока не только заслушивались ответы обучающегося, но и осуществлялась проверка его умения применять знания на практике.

2. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ДОКЛАДОВ

Общие положения

Доклад, как вид самостоятельной работы в учебном процессе, способствует формированию навыков исследовательской работы, расширяет познавательные интересы, учит критически мыслить.

При написании доклада по заданной теме обучающийся составляет план, подбирает основные источники.

В процессе работы с источниками систематизирует полученные сведения, делает выводы и обобщения.

К докладу по крупной теме могут привлекать несколько обучающихся, между которыми распределяются вопросы выступления.

Выбор темы доклада

Тематика доклада обычно определяется преподавателем, но в определении темы инициативу может проявить и обучающийся.

2.2. Прежде чем выбрать тему доклада, автору необходимо выявить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить.

Этапы работы над докладом

Формулирование темы, причем она должна быть не только актуальной по своему значению, но и оригинальной, интересной по содержанию.

Подбор и изучение основных источников по теме (как правильно, при разработке доклада используется не менее 8-10 различных источников).

Составление списка использованных источников.

Обработка и систематизация информации.

Разработка плана доклада.

Написание доклада.

Публичное выступление с результатами исследования.

Структура доклада:

- титульный лист (Приложение №1)
- оглавление (в нем последовательно излагаются названия пунктов доклада, указываются страницы, с которых начинается каждый пункт);
- введение (формулирует суть исследуемой проблемы, обосновывается выбор темы, определяются ее значимость и актуальность, указываются цель и задачи доклада, дается характеристика используемой литературы);
- основная часть (каждый раздел ее, доказательно раскрывая отдельную проблему или одну из ее сторон, логически является продолжением предыдущего; в основной части могут быть представлены таблицы, графики, схемы);
- заключение (подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме доклада, предлагаются рекомендации);
- список использованных источников.

Структура и содержание доклада

Введение - это вступительная часть научно-исследовательской работы. Автор должен приложить все усилия, чтобы в этом небольшом по объему разделе показать актуальность темы, раскрыть практическую значимость ее, определить цели и задачи эксперимента или его фрагмента.

Основная часть. В ней раскрывается содержание доклада. Как правило, основная часть состоит из теоретического и практического разделов. В теоретическом разделе раскрываются история и теория исследуемой проблемы, дается критический анализ литературы и показываются позиции автора.

В практическом разделе излагаются методы, ход, и результаты самостоятельно проведенного эксперимента или фрагмента. В основной части могут быть также представлены схемы, диаграммы, таблицы, рисунки и т.д.

В заключении содержатся итоги работы, выводы, к которым пришел автор, и рекомендации. Заключение должно быть кратким, обязательным и соответствовать поставленным задачам.

Список использованных источников представляет собой перечень использованных книг, статей, фамилии авторов приводятся в алфавитном порядке, при этом все источники даются под общей нумерацией литературы. В исходных данных источника указываются фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания.

Приложение к докладу оформляются на отдельных листах, причем каждое должно иметь свой тематический заголовок и номер, который пишется в правом верхнем углу, например: «Приложение 1».

Требования к оформлению доклада

Объем доклада может колебаться в пределах 5-15 печатных страниц; все приложения к работе не входят в ее объем.

Доклад должен быть выполнен грамотно, с соблюдением культуры изложения.

Обязательно должны иметься ссылки на используемую литературу.

Должна быть соблюдена последовательность написания библиографического аппарата.

Критерии оценки доклада

- актуальность темы исследования;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников;
- соответствие оформления доклада стандартам.

По усмотрению преподавателя доклады могут быть представлены на семинарах, научно-практических конференциях, а также использоваться как зачетные работы по пройденным темам.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ПРЕЗЕНТАЦИЙ

Компьютерную презентацию, сопровождающую выступление докладчика, удобнее всего подготовить в программе MS PowerPoint.

Презентация как документ представляет собой последовательность сменяющих друг друга слайдов - то есть электронных страничек, занимающих весь экран монитора (без присутствия панелей программы). Чаще всего демонстрация презентации проецируется на большом экране, реже – раздается собравшимся как печатный материал.

На первом слайде обязательно представляется тема выступления и сведения об авторе. Следующие слайды можно подготовить, используя две различные стратегии их подготовки:

1 стратегия: на слайды выносятся опорный конспект выступления и ключевые слова с тем, чтобы пользоваться ими как планом для выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- объем текста на слайде – не больше 7 строк;
- маркированный/нумерованный список содержит не более 7 элементов;
- отсутствуют знаки пунктуации в конце строк в маркированных и нумерованных списках;
- значимая информация выделяется с помощью цвета, кегля, эффектов анимации.

Основная ошибка при выборе данной стратегии состоит в том, что выступающие заменяют свою речь чтением текста со слайдов.

2 стратегия: на слайды помещается фактический материал (таблицы, графики, фотографии и пр.), который является уместным и достаточным средством наглядности, помогает в раскрытии стержневой идеи выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- выбранные средства визуализации информации (таблицы, схемы, графики и т. д.) соответствуют содержанию;
- использованы иллюстрации хорошего качества (высокого разрешения), с четким изображением (как правило, никто из присутствующих не заинтересован вчитываться в текст на ваших слайдах и всматриваться в мелкие иллюстрации);
- Максимальное количество графической информации на одном слайде 2-3 рисунка (фотографии, схемы и т.д.) с текстовыми комментариями (не более 2 строк к каждому). Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.

Особо тщательно необходимо отнестись к оформлению презентации. Для всех слайдов презентации по возможности необходимо использовать один и тот же шаблон оформления, кегль – для заголовков - не меньше 24 пунктов, для информации - для информации не менее 18. В презентациях не принято ставить переносы в словах.

Для показа файл презентации необходимо сохранить в формате «Демонстрация PowerPoint» (Файл — Сохранить как — Тип файла — Демонстрация PowerPoint). В этом случае презентация автоматически

открывается в режиме полноэкранного показа (slideshow) и слушатели избавлены как от вида рабочего окна программы PowerPoint, так и от потерь времени в начале показа презентации.

Компьютерная презентация должна содержать начальный и конечный слайды. Основные слайды презентации:

1-ый слайд – титульный лист – тема, автор; (Приложение №3)

2-ий слайд – содержание презентации;

в конце – список используемых материалов. Соблюдайте основные правила цитирования и авторские права. (Обязательно указание первоисточников материалов: откуда взяли иллюстрации, звуки, тексты, ссылки; указываются и печатные издания). Объем презентации не менее 15 слайдов.

Каждый слайд должен быть логически связан с предыдущим и последующим;

Виды слайдов. Для обеспечения наглядности следует использовать разные способы размещения информации и разные виды слайдов:

- с текстом
- с иллюстрациями;
- с таблицами;
- с диаграммами;
- с анимацией (если уместно)

Шрифт:

Текст должен быть хорошо виден.

- Размер шрифта должен быть максимально крупным на слайде.
- Самый «мелкий» для презентации – шрифт 24 пт (для текста) и 40 пт (для заголовков).
- Лучше использовать шрифты Arial, Times New Roman.
- Интервал между строк – полуторный
- Желательно устанавливать единый стиль шрифта для всей презентации.

Расположение информации на странице:

- Проще считывать информацию расположенную горизонтально, а не вертикально.
- Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.
- Форматировать текст нужно по ширине страницы.

Объем информации:

- Не допустимо заполнять один слайд слишком большим объемом информации
- Наибольшая эффективность передачи содержания достигается, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде.

Способы выделения информации:

- Следует наглядно размещать информацию: применять рамки, границы, заливку, разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки.
- Используйте рисунки, диаграммы, схемы, таблицы, выделяйте опорные слова.

Воздействие цвета:

- Важно грамотное сочетание цвета в презентации.
- На одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста.
- Для фона и текста используйте контрастные цвета.

Цвет фона:

- Для фона выбирайте более холодные тона (предпочтительнее) со светлым шрифтом или светлый фон и темные надписи.
- Пёстрый фон не применять
- Подготовленные для представления презентации должны отвечать следующим требованиям:
 - цель доклада должна быть сформулирована в начале выступления;
 - выступающий должен хорошо знать материал по теме своего выступления, быстро и свободно ориентироваться в нем;
 - недопустимо читать текст со слайдов или повторять наизусть то, что показано на слайде;
 - речь докладчика должна быть четкой, умеренного темпа;
 - докладчику во время выступления разрешается держать в руках листок с тезисами своего выступления, в который он имеет право заглядывать;

Критерии оценивания:

1. Удобство восприятия.
2. Информативность.
3. Целесообразность действий:
 - смена слайдов: автоматически, по щелчку,
 - эффекты анимации: анимации текстового материала, анимации фотографий, рисунков.
4. Соразмерность и сочетаемость следующих характеристик:
 - выбор шаблона дизайна,
 - кегль и шрифт,
 - цветовая гамма (текст и заголовок),
 - количество и размещение фотографий
 - надпись фотографии или рисунка и их соответствие текстовому материалу или изображению.
5. Тезисы вместо громоздких сложноподчинённых предложений.
6. Грамотность изложенного материала (орфография, пунктуация, стилистика).

4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАЧ

1. При решении уравнений:

а) целые уравнения:

- 1) Соблюдать последовательность при нахождении неизвестного компонента.
- 2) Решение уравнения записывать в левой части страницы, справа – письменные вычисления.
- 3) Знак равенства при решении уравнения используется только один раз в каждой строчке.
- 4) Проверку полученных корней делать необязательно, т.к. чаще она является формальной и только занимает время. Проверка выполняется, если это указано в задании (Решить уравнение и выполнить проверку).
- 5) В конце решения уравнения записывают ответ.

б) дробно-рациональные уравнения:

- 1) Привести уравнение к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ и решить систему $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$.

- 2) При решении соблюдаются все правила решения целых уравнений.

с) иррациональные уравнения:

- 1 способ. Найти область допустимых значений и избавиться от иррациональности. Корни уравнения отбирать с учетом ОДЗ.
- 2 способ. Избавиться от иррациональности, а затем произвести проверку полученных значений переменной и отобрать корни уравнения.

д) квадратные уравнения:

- 1) При решении допускается запись формул дискриминанта и корней уравнения в общем виде, а затем выполнение вычислений, либо выполнение вычислений без записи формул.
- 2) При решении уравнения с четным вторым коэффициентом допускается использование двух видов формул.
- 3) Решение неполного квадратного уравнения можно выполнять с помощью формул либо разложением на множители.

е) графический способ решения уравнений:

- 1) Обязательным условием является наличие подписи каждого графика, осей координат, указание начала отсчета и единичных отрезков.
- 2) Необходимо на чертеже отметить точки пересечения графиков и их абсциссы.
- 3) Записать ответ.

2. При решении неравенств:

- 1) При решении линейных и квадратных неравенств можно не использовать геометрическую интерпретацию с помощью координатной прямой.
- 2) При решении дробно-рациональных неравенств допускается два способа: переход к системе или равносильному целому неравенству либо нахождение нулей числителя и знаменателя с дальнейшей геометрической интерпретацией (согласно условию).

3. При решении текстовых задач:

- 1) Составить и записать краткое условие к задаче (схема, чертеж, таблица). В условии должен быть указан главный вопрос задачи.
- 2) При решении задачи составлением уравнения обязательно записать, какая величина обозначена за X , затем все остальные величины выразить через X , обосновать составление уравнения с учетом данных условия задачи.
- 3) В полученном в итоге решения уравнении $x=a$ не допускается записи единиц измерения и пояснений.
- 4) Пояснения к полученным числовым значениям выполняются строкой, записанной ниже строки $x=a$.
- 5) В итоге решения записывается ответ на главный вопрос задачи (число с наименованием).

4. При решении геометрических задач:

- 1) Составить краткое условие к задаче (дано, найти или доказать) и сделать чертеж. Необходимо выполнять запись условия справа от чертежа. Чертеж выполняется карандашом и использованием чертежных инструментов.
- 2) Записать формулы для решения задачи. В формулах использовать те обозначения, которые сделаны учеником в краткой записи условия.
- 3) При решении задачи необходимо обосновывать каждый этап, ссылаясь на изученные положения теоретического материала (аксиомы, свойства, теоремы, признаки, следствия и др.). Названия ссылок на теорию должны быть сформулированы правильно, в соответствии с предложенными в учебниках.
- 4) После решения записывается ответ (число с кратким наименованием: км, дм^2 , м^3 и др.).

5. При исследовании свойств функции:

- 1) Промежутки монотонности функции можно записывать двумя способами: С использованием теории множеств (функция $y(x)$ возрастает, если $x \in (-1; 5) \cup [9; 11)$).
- 2) В текстовом варианте (функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(-1; 5)$ и $[9; 11)$). В этом случае знаки теории множеств не употребляются.

6. При исследовании функции с помощью производной и построении её графика:

Общая схема исследования функции:

- 1) Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
- 2) Установить, является ли функция чётной или нечётной.
- 3) Функция называется четной если $f(-x) = f(x)$ и ее график симметричен относительно оси Y ; если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из данного множества, то функция называется нечетной, и ее график симметричен относительно начала координат.
- 4) Найти точки пересечения с осями координат (если это не вызывает затруднений).

- 5) Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
- 6) Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
- 7) Вычислить производную функции. Найти критические точки – точки, в которых производная равна нулю или не существует. Определить знак производной на каждом из интервалов слева и справа от критических точек. Где производная положительная, функция монотонно возрастает, а на интервалах, где производная отрицательная – функция убывает.
- 8) Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
- 9) Вычислить вторую производную функции. Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Определить знак производной на каждом из интервалов. Где вторая производная положительная, функция вогнута, а на интервалах, где вторая производная отрицательная – функция выпукла. Точки, в которых вторая производная меняет свой знак, являются точками перегиба функции.
- 10) Используя полученные сведения, построить график функции.
- 11) Этот план исследования функции и построения графика является примерным, его не всегда нужно придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые опускать, если они совсем не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то это можно не делать; если функция – четная, то ее график симметричен относительно оси ОУ, поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции и т.п.

Критерии оценивания

Ответ оценивается:

Оценка «5», если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Оценка «4» ставится в следующих случаях:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущены одна ошибка или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Оценка «3» ставится, если:

- допущено более одной ошибки или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Оценка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере;
- полного незнания изученного материала, отсутствия элементарных умений и навыков.

5. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1) Внимательно читайте все задания работы и указания по их выполнению.

2) Если не можете выполнить очередное задание, не тратьте время, переходите к следующему.

3) Только выполнив все задания, вернитесь к тем, которые у вас не получились сразу.

4) Старайтесь работать быстро и аккуратно.

5) Если ошибся, то зачеркните ошибку и выберите другой ответ.

6) Когда выполните все задания работы, проверьте.

Критерии оценивания

При проверке преподаватель подсчитывает количество верных заданий. За каждый правильный ответ - 1 балл.

- оценка "5" (отлично) - обучающийся уверенно и точно владеет знаниями и умениями – выполнение задания на 90-100%;

- оценка "4" (хорошо) - владеет знаниями и умениями, но возможны отдельные несущественные ошибки – выполнение задания на 80%;

- оценка "3" (удовлетворительно) - ставится при недостаточном владении знаниями и умениями, наличии ошибок, исправляемых с помощью преподавателя – выполнение задания на 70%.

Филиал Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Иркутской области «Иркутский колледж автомобильного транспорта и дорожного строительства» в поселке Улькан

Доклад
по учебной дисциплине Математика
Тема: «»

Выполнил:
Проверил:

Линейные уравнения

Уравнением первой степени с одним неизвестным, или **линейным** уравнением, называется уравнение вида $ax + b = 0$.

Если $a \neq 0$ оно имеет единственный корень $x = \frac{-b}{a}$

Пример 1.

$$3x = 18$$

$$x = 18 : 3$$

$$x = 6$$

Ответ: $x = 6$

Пример 2.

$$8x - 2 = 14$$

$$8x = 14 + 2$$

$$x = 16 : 8$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

Если $a=0$; $b=0$ имеет бесконечное множество корней.

Пример 3.

$$4x - 2 = 4x - 2$$

$$4x - 4x = 2 - 2$$

$$0 = 0$$

Если $a=0$; $b \neq 0$ не имеет решений.

Пример 4.

$$5x + 8 = 5x - 1$$

$$5x - 5x = -8 - 1$$

$$0 = -9$$

Основные свойства уравнений:

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.
2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Применяя эти свойства, уравнения, сводящиеся к линейным, обычно решают так:

- 1) переносят члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестного, в правую (свойство 1);
- 2) приводят подобные члены;
- 3) делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Примеры решения уравнений, сводящихся к линейным

1. $5x + 2 = 7x - 6$

Перенесем все члены, содержащие x в левую часть равенства, а все члены, не содержащие x – в правую, меняя при этом их знаки на противоположные:

$$5x - 7x = -6 - 2 \quad \text{Приведем подобные:}$$

$$-2x = -8$$

$$x = -8 : (-2)$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$

$$2. \quad x - 1 + x - 2 + x - 3 = 0$$

Приведем подобные в левой части уравнения:

$$3x - 6 = 0$$

Число без переменной перенесем в правую часть уравнения и поменяем знак (по свойству уравнений):

$$3x = 6$$

$$x = 6 : 3$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

$$3. \quad 3(n + 5) = 30 + 6n$$

Откроем скобки в левой части уравнения (3 умножим на каждое слагаемое в скобках):

$$3n + 15 = 30 + 6n$$

Перенесем члены, содержащие x в левую часть равенства, а члены, не содержащие x – в правую, меняя при этом их знаки на противоположные:

$$3n - 6n = 30 - 15 \quad \text{Приведем подобные:} \quad -3n = 15$$

$$n = 15 : (-3)$$

$$n = -5$$

Ответ: $n = -5$

$$4. \quad 12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$$

Откроем скобки в левой и правой частях уравнения (в левой части уравнения поменяем знаки у слагаемых на противоположные, т.к. перед скобкой стоит знак минус):

$$12 - 4x + 18 = 36 + 4x + 18 - 6x$$

Перенесем все члены, содержащие x в левую часть равенства, а все члены, не содержащие x – в правую, меняя при этом их знаки на противоположные:

$$-4x - 4x + 6x = 36 - 18 - 12 + 18$$

Приведем подобные:

$$-2x = 24$$

$$x = -12$$

Ответ: $x = -12$

$$5. \quad x + \frac{2x-7}{2} - \frac{3x+1}{5} = 5 - \frac{x+6}{2}$$

Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в это уравнение.

Общим знаменателем чисел 2 и 5 будет 10.

Найдем дополнительные множители для каждого члена равенства, получим:

$$10x + 5(2x - 7) - 2(3x + 1) = 50 - 5(x + 6)$$

Раскроем скобки и приведем подобные в обеих частях равенства:

$$14x - 37 = 20 - 5x$$

Перенесем все члены, содержащие x в левую часть равенства, а все члены, не содержащие x - в правую, и приведем подобные:

$$19x = 57.$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3

Тренажер

$$1. \frac{2x+1}{7} - \frac{x-1}{4} = 1 \quad \text{Ответ: } 17$$

$$2. \frac{2x+3}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{7}{6} \quad \text{Ответ: } -2$$

$$3. x - \frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{1}{3} \quad \text{Ответ: } -1$$

$$4. \frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} = \frac{5x+1}{3} \quad \text{Ответ: } 1$$

Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

где a , b и c - произвольные действительные числа, причем $a \neq 0$.

Если в квадратном уравнении, хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется *неполным* квадратным уравнением. Следовательно, неполные квадратные уравнения могут быть таких видов:

$$1) ax^2 + c = 0 \quad 2) ax^2 + bx = 0 \quad (2)$$

Если в уравнении (1) $a = 1$, то уравнение называется *приведенным*. Его обычно записывают в виде:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Рассмотрим решение квадратных уравнений.

1. Чтобы решить неполное квадратное уравнение вида

$$ax^2 + c = 0,$$

перенесем его свободный член c в правую часть и разделим обе части уравнения на a . Мы получим уравнение вида

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad (3)$$

которое равносильно исходному.

а) Если $c=0$, то уравнение (3) имеет единственный корень $x=0$.

б) Если $-\frac{c}{a} > 0$ то уравнение (3) имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

в) Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение (3) действительных корней не имеет.

2. Для решения неполного квадратного уравнения вида

$$ax^2 + bx = 0$$

при $b \neq 0$ разложим его левую часть на множители. Мы получим, что

$$x(ax + b) = 0 \quad (4)$$

Произведение может быть равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0.$$

Следовательно корнями уравнения (4) являются значения

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Неполное квадратное уравнение $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ всегда имеет два корня.

3. Корни квадратного уравнения общего вида (1) вычисляются по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

Из (5) следует, что:

а) если $D > 0$, то уравнение (1) имеет два различных действительных корня;

б) если $D = 0$, то уравнение (1) имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$;

в) если $D < 0$, то уравнение (1) действительных корней не имеет.

Заметим здесь, что если в квадратном уравнении (1) коэффициент b - число четное, т.е. уравнение имеет вид

$$x^2 + 2bx + c = 0, \quad (6)$$

то корни квадратного уравнения можно вычислить по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

4. Корни приведенного квадратного уравнения можно вычислять по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Их также можно находить с помощью теоремы Виета.

Теорема. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Пример 1.

Решите уравнение: $4x^2 - 9 = 0$. В ответе укажите больший корень уравнения.

Решение. Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на 4:

$$x^2 = \frac{9}{4}, \text{ откуда } x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,5

Пример 2.

Решите уравнение: $4x^2 - 3x = 0$. В ответе укажите меньший корень уравнения.

Решение. Вынесем x за скобку: $x(4x - 3) = 0$

$x = 0$ или $(4x - 3) = 0$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$

Ответ: 0

Пример 3.

Решите уравнение: $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$. В ответе укажите наименьший корень уравнения.

Решение. Введем новую переменную

$$y = x^2 - 2x \quad (7)$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^2 - 11y + 24 = 0.$$

Найдем его корни:

$$y_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2}, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = 3.$$

Подставляя найденные значения y в формулу замены (6), получим два уравнения:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ и } x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Корни этих уравнений легко угадать, используя теорему Виета. Корни первого уравнения: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Корни второго уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Решение исходного уравнения: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

Ответ: -2

Общий алгоритм решения квадратного уравнения

Исходя из вышесказанного, сформулируем

общий алгоритм решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

1) Определяем коэффициенты a , b , c .

2) Вычисляем дискриминант $D = b^2 - 4ac$

3) Определяем сколько будет корней:

$D < 0$ корней нет

$D > 0$ два различных корня

$D = 0$ два равных корня

4) Находим корни уравнения по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

5) Записываем ответ.

Данный алгоритм универсален и подходит для решения любых квадратных уравнений. Полных и неполных, приведенных и не приведенных.

$$4. x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$1) a = 1 \quad 2) D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 9 + 160 = 169$$

$$b = -3 \quad 3) 169 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$c = -40 \quad 4) x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3+13}{2} = 8 \quad x_2 = \frac{3-13}{2} = -5$$

$$5) \text{ Ответ: } x_1=8; \quad x_2=-5$$

$$5. x^2 - 24 = -5x$$

$$x^2 - 24 + 5x = 0$$

$$1) a = 1 \quad 2) D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 25 + 96 = 121$$

$$b = -5 \quad 3) 121 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$c = -24 \quad 4) x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-5+11}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-5-11}{2} = -8$$

$$5) \text{ Ответ: } x_1=3; \quad x_2=-8$$

$$5. x^2 - 6x = 5x - 12 - x^2$$

Используя свойства уравнений, приведем к общему виду квадратного уравнения:

$$x^2 - 6x - 5x + 12 + x^2 = 0$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$1) a = 2 \quad 2) D = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 13 = 225 - 104 = 121$$

$$b = -15 \quad 3) 121 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$c = 13 \quad 4) x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{15-11}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{15+11}{4} = 6,5$$

$$5) \text{ Ответ: } x_1=1; \quad x_2=6,5$$

$$6. -x^2 + 3x + 55 = (x+7)^2$$

Открываем скобки в правой части по формуле квадрата суммы

$$-x^2 + 3x + 55 = x^2 + 14x + 49$$

Переносим все члены уравнения из правой части в левую, изменив знаки на противоположные:

$$-x^2 + 3x + 55 - x^2 - 14x - 49 = 0$$

Приведем подобные, получим квадратное уравнение:

$$-2x^2 - 11x + 6 = 0$$

Решаем по алгоритму:

$$1) a = -2 \quad 2) D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 = 121 + 48 = 169$$

$$b = -11 \quad 3) 169 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$c = 6 \quad 4) x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{11+13}{-4} = -6$$

$$x_2 = \frac{11-13}{-4} = 0,5$$

5) Ответ: $x_1 = 6$; $x_2 = 0,5$

Тренажер

1) Решить уравнения:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| а) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ | б) $5x^2 - 7x + 2 = 0$ | в) $3x^2 + 8x - 3 = 0$ |
| г) $-x^2 + 2x + 8 = 0$ | д) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ | е) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ |
| ж) $-x^2 + 7x - 10 = 0$ | з) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ | и) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ |
| к) $5x^2 - 3x - 2 = 0$ | л) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ | м) $6x^2 + x - 1 = 0$ |
| н) $-x^2 + 7x + 8 = 0$ | о) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ | п) $-x^2 - 2x + 15 = 0$ |
| р) $x^2 - 5x - 1 = 0$ | с) $5x^2 - 8x - 4 = 0$ | т) $x^2 + 3x + 1 = 0$ |
| у) $6x^2 - 7x + 1 = 0$ | ф) $3x^2 + 7x - 6 = 0$ | ч) $5x^2 - 8x + 3 = 0$ |
| ц) $2x^2 - 9x + 4 = 0$ | ш) $7x^2 + 9x + 2 = 0$ | щ) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ |

2) Решить уравнения, приводящиеся к квадратным:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------|
| а) $3x^2 + 9 = 12x - x^2$ | б) $18 - x^2 = 14$ | в) $x^2 + 3 = 3 - x$ |
| г) $x(x+2)=2$ | д) $x^2 - 6x = 4x - 25$ | е) $x(2x+1) = 3x + 4$ |
| ж) $(10x - 4)(3x + 2) = 0$ | з) $(x-1)(5x + \frac{1}{2}) = 0$ | и) $9(x-8)(6x-4) = 0$ |
| к) $x(x+3) - 4(x-5) = 7(x+4) - 8$ | | |

Дробно-рациональные уравнения

Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называются дробно-рациональными уравнениями. Дробно-рациональные уравнения, как правило, приводятся к виду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \text{ где } P(x) \text{ и } Q(x) - \text{многочлены.}$$

Пример. $\frac{x}{x+1} = 2 + \frac{1}{x-1} + 1$

Для решения подобных уравнений умножить обе части уравнения на $Q(x)$, что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому, при решении дробно-рациональных уравнений необходима проверка найденных корней.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Решение дробно-рационального уравнения сводится в конечном итоге к замене исходного уравнения целым уравнением, которое равносильно исходному уравнению или является его следствием.

При решении дробного уравнения целесообразно поступать следующим образом:

- 1) определить область допустимых значений переменной x (ОДЗ);
- 2) найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- 3) умножить обе части уравнения на общий знаменатель и привести подобные;
- 4) решить получившееся целое уравнение.

Описанные преобразования не сужают ОДЗ переменной x , но могут ее расширить. Следовательно, в результате указанных преобразований возможно появление посторонних корней, (но не их потеря). Получив решение преобразованного уравнения, следует отбросить те его корни, которые обращают в нуль общий знаменатель исходного уравнения.

Пример 1.

$$\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения. Поскольку знаменатели дробей не могут обращаться в ноль, то $x \neq -1$ и $x \neq -3$.

Умножим теперь обе части уравнения на общий знаменатель, который равен $(x+1)(x+3)$. Мы получим уравнение:

$$5(x+3) + (4x-6) = 3(x+1)(x+3),$$

Раскроем скобки в обеих частях равенства и приведем подобные. Мы получим:

$$9x + 9 = 3x^2 + 12x + 9,$$

откуда

$$3x^2 + 3x = 0$$

$$3x(x+1) = 0$$

$$3x = 0 \quad (x+1) = 0$$

Решив неполное квадратное уравнение мы будем иметь

$x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Значение $x_2 = -1$ не входит в ОДЗ уравнения. Единственный корень исходного уравнения есть $x=0$.

Ответ: 0

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} = \frac{3}{x}.$$

Решение. Приравняем уравнение к 0.

$$\frac{3}{x}$$

Перенесём член $\frac{3}{x}$ в левую часть уравнения с противоположным знаком.

Выполним преобразования левой части уравнения.

$$\frac{a}{b} = 0$$

Вспомним условия равенства дроби нулю:

тогда, и только тогда, когда одновременно выполняются два соотношения:

- 1) числитель дроби равен нулю ($a = 0$);
- 2) знаменатель дроби отличен от нуля ($b \neq 0$).

Приравняв к нулю числитель дроби в левой части уравнения (1), получим

$$\begin{aligned}
 3(5x^2 - 13x + 6) &= 0; \\
 5x^2 - 13x + 6 &= 0; \\
 x_{1,2} &= \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2 \cdot 5} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{10} = \frac{13 \pm 7}{10}; \\
 x_1 &= \frac{13+7}{10} = 2; \quad x_2 = \frac{13-7}{10} = \frac{6}{10} = 0,6.
 \end{aligned}$$

Осталось проверить выполнение второго указанного выше условия. Соотношение $(b \neq 0)$ означает для уравнения (1), что $2x(x - 3) \neq 0$, т.е. $x \neq 0$, $x \neq 3$.

Значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 0,6$ указанным соотношениям удовлетворяют и потому служат корнями уравнения (1), а вместе с тем и корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; 0,6.

Если среди корней числителя окажется число, при котором знаменатель дроби обращается в нуль, то такое число корнем уравнения быть не может, его называют посторонним корнем и в ответ не включают.

Опираясь на решенный пример, сформулируем следующий алгоритм.

Алгоритм решения рационального уравнения:

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.
2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$.
3. Решить уравнение $p(x) = 0$.
4. Для каждого корня уравнения $p(x) = 0$ сделать проверку: удовлетворяет ли он условию $q(x) \neq 0$ или нет. Если да, то это — корень заданного уравнения; если нет, то это — посторонний корень и в ответ его включать не следует.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}.$$

Решение. Будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} - \frac{4}{x(2-x)} = 0.$$

2) Выполним преобразования левой части этого уравнения:
(одновременно изменили знаки в числителе и знаменателе дроби).

Таким образом, заданное уравнение принимает вид

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{2x(x-2)} = 0.$$

3) Решим уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$. Находим

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}; \\
 x_1 &= \frac{6+2}{2} = 4; \quad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2.
 \end{aligned}$$

4) Для найденных значений проверим выполнение условия $2x(x - 2) \neq 0$.

Число 4 этому условию удовлетворяет, а число 2 — нет. Значит, 4 — корень заданного уравнения, а 2 — посторонний корень.

О т в е т: 4.

Решение рациональных уравнений методом введения новой переменной

Покажем на примерах, как метод введения новой переменной применяется при решении рациональных уравнений.

Пример 4.

$$\frac{1}{x^2+3x-3} + \frac{2}{x^2+3x+1} = \frac{7}{5}.$$

Решение. Заметим, что здесь дважды встречается одно и то же выражение x^2+3x . Значит, имеет смысл ввести новую переменную $y = x^2 + 3x$. Это позволит переписать уравнение в более простом и приятном виде (что, собственно говоря, и составляет цель введения новой переменной — и запись упрощается, и структура уравнения становится более ясной):

$$\frac{1}{y-3} + \frac{2}{y+1} = \frac{7}{5}.$$

А теперь воспользуемся алгоритмом решения рационального уравнения.

1) Перенесем все члены уравнения в одну часть:

$$\frac{1}{y-3} + \frac{2}{y+1} - \frac{7}{5} = 0$$

2) Преобразуем левую часть уравнения

Итак, мы преобразовали заданное уравнение к виду

$$\frac{-7y^2 + 29y - 4}{5(y-3)(y+1)} = 0.$$

3) Из уравнения $-7y^2 + 29y - 4 = 0$ находим

$$y_1 = 4, y_2 = \frac{1}{7}$$

4) Выполним проверку найденных корней с помощью условия $5(y-3)(y+1) \neq 0$.

Оба корня этому условию удовлетворяют.

Итак, квадратное уравнение относительно новой переменной y решено:

$$y_1 = 4, y_2 = \frac{1}{7}.$$

Поскольку $y = x^2 + 3x$, а y , как мы установили, принимает два значения: 4 и $\frac{1}{7}$ — нам еще предстоит решить два уравнения: $x^2 + 3x = 4$;

$$x^2 + 3x = \frac{1}{7}$$

Корнями первого уравнения являются числа 1 и -4, корнями второго уравнения — числа

$$\frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$$

О т в е т: 1, -4, $\frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

В рассмотренных примерах одно и то же выражение явно встречалось в записи уравнения несколько раз и был резон обозначить это выражение новой буквой. Но так бывает не всегда, иногда новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований.

Пример 5.

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = 24.$$

Решение. Имеем

$$x(x-3) = x^2 - 3x;$$

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2.$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x^2 - 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$$

Вот теперь новая переменная «проявилась»: $y = x^2 - 3x$.

С ее помощью уравнение можно переписать в виде

$$y(y+2) = 24$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0.$$

Корнями этого уравнения служат числа 4 и -6.

Возвращаясь к исходной переменной x , получаем два уравнения $x^2 - 3x = 4$ и $x^2 - 3x = -6$. Из первого уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; второе уравнение не имеет корней.

О т в е т: 4, — 1.

Пример 6.

$$x^4 + x^2 - 20 = 0.$$

Решение. Введем новую переменную $y = x^2$.

Так как $x^4 = (x^2)^2 = y^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде

$$y^2 + y - 20 = 0.$$

Это — квадратное уравнение, корни которого найдем, используя известные формулы; получим $y_1 = 4$, $y_2 = -5$.

Но $y = x^2$, значит, задача свелась к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4; x^2 = -5.$$

Из первого уравнения находим $x_{1,2} = \pm 2$,

второе уравнение не имеет корней.

Ответ: ± 2 .

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называют **биквадратным уравнением** («би» — два, т. е. как бы «дважды квадратное» уравнение). Только что решенное уравнение было именно биквадратным. Любое биквадратное уравнение решается так же, как уравнение из примера 5:

- 1) вводят новую переменную $y = x^2$,
- 2) решают полученное квадратное уравнение относительно переменной y ,
- 3) возвращаются к переменной x .

$$1. 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

$$1) x^2 = t$$

$$9t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$2) D = (-10)^2 - 4 * 9 * 1 = 64$$

$$t_1 = \frac{10-8}{2*9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$t_2 = \frac{10+8}{18} = 1$$

$$3) x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$$

Ответ: $\pm\frac{1}{3}; \pm 1$

$$2. x^4 + 7x^2 - 8 = 0$$

$$1) x^2 = t$$

$$t^2 + 7t - 8 = 0$$

$$2) t_1 + t_2 = -7$$

$$t_1 * t_2 = -8$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -8 \text{ - посторонний корень}$$

$$3) x_{1,2} = \pm\sqrt{1}$$

$$\text{Ответ: } \pm 1$$

$$3. x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$1) x^2 = t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$2) t_1 + t_2 = 3$$

$$t_1 * t_2 = -4$$

$$t_1 = -1 \text{ - посторонний корень}$$

$$t_2 = 4$$

$$3) x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\text{Ответ: } \pm 2$$

$$4. 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

$$1) x^2 = t$$

$$4t^2 - 17t + 4 = 0$$

$$2) D = (-17)^2 - 4 * 4 * 4 = 225$$

$$t_1 = \frac{17 + 15}{2 * 4} = \frac{32}{8} = 4$$

$$t_2 = \frac{17 - 15}{8} = \frac{2}{8} = 0,25$$

$$3) x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{0,25} = \pm 0,5$$

$$\text{Ответ: } \pm 0,5; \pm 2$$

$$5. x^4 - 14x^2 + 49 = 0$$

$$1) x^2 = t$$

$$t^2 - 14t + 49 = 0$$

$$2) t_1 + t_2 = 14$$

$$t_1 + t_2 = 49$$

$$3) x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } \pm\sqrt{7}$$

Тренажер

Решить уравнения:

$$1. \quad \frac{3x-2}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3x+4}{x^2-2x} \quad \text{Ответ: } 4$$

$$2. \quad \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x} \quad \text{Ответ: } 3$$

Решите уравнения. В ответе укажите наибольший корень уравнения.

$$3. \quad \frac{x^2+1}{x-4} - \frac{x^2-1}{x+3} = 23 \quad \text{Ответ: } 5$$

$$4. \quad \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = 2 \quad \text{Ответ: } 5$$

$$5. \quad \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2} \quad \text{Ответ: } 3$$

$$6. \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x+2} \quad \text{Ответ: } 1$$

$$7. \quad 3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{Ответ: } 3$$

$$8. \quad \frac{x^2}{3} + \frac{40}{x} = \frac{10x}{3} - \frac{48}{x^2} \quad \text{Ответ: } 2$$

Решите уравнения. В ответе укажите наименьший корень уравнения.

$$9. \quad x - 1,5 + \frac{1}{x+1} = 0 \quad \text{Ответ: } -0,5$$

$$10. \quad \frac{x^2-1}{x+3} - \frac{x^2+1}{x+4} = \frac{1}{x^2+7x+12} \quad \text{Ответ: } -2$$

$$11. \quad \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4} \quad \text{Ответ: } -2$$

$$12. \quad \frac{1}{3(x-4)} + \frac{1}{2(x^2+3)} + \frac{1}{x^3-4x^2+3x-12} = 0 \quad \text{Ответ: } 1,5$$

$$13. \quad \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0 \quad \text{Ответ: } -5$$

$$14. \quad 6x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Неравенство – отношение, связывающее два числа a_1 и a_2 и посредством одного из знаков: $<$ (меньше), $\leq$ (меньше или равно), $>$ (больше), $\geq$ (больше или равно), $\neq$ (неравно), то есть $a_1 > a_2$, $a_1 < a_2$, $a_1 \geq a_2$, $a_1 \leq a_2$, $a_1 \neq a_2$.

Решением неравенств с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенство, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*.
Неравенства, не имеющие решения, также считают *равносильными*.

При решении неравенств используются следующие свойства:

- 1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
- 2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.
- 3) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Например, неравенство

$$18 + 6x > 0$$

равносильно неравенству

$$6x > -18,$$

а неравенство $6x > -18$ равносильно неравенству $x > -3$.

Линейные неравенства

Нужно заменить заданное неравенство равносильным ему неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$, где a и b – некоторые числа. Неравенства такого вида называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

Например:

$$x + 3 > 5x - 5$$

Такие неравенства решаются с помощью тождественных преобразований неравенств.

Решаем это неравенство:

$$x + 3 > 5x - 5$$

Решаем точно так же, как и линейное уравнение. С единственным отличием:

Внимательно следим за знаком неравенства!

Первый шаг самый обычный. С иксами - влево, без иксов - вправо... Это первое тождественное преобразование, простое и безотказное.) Только знаки у переносимых членов не забываем менять.

Знак неравенства сохраняется:

$$x - 5x > -5 - 3$$

Приводим подобные.

Знак неравенства сохраняется:

$$-4x > -8$$

Осталось применить последнее тождественное преобразование: разделить обе части на -4 .

Делим на **отрицательное** число.

Знак неравенства изменится на противоположный:

$$x < 2$$

Это ответ.

Так решаются все линейные неравенства.

Линейные неравенства на числовой оси

Любой ответ линейного неравенства, типа $x < 2$, или $x \geq -0,5$ можно изобразить на числовой оси.

1. Решить неравенство:

$$4x - 3 \neq 0$$

Задания в таком виде встречаются редко. Но, как вспомогательные неравенства, при нахождении ОДЗ, например, или при нахождении области определения функции, - встречаются сплошь и рядом. Такое линейное неравенство можно решать как обычное линейное уравнение. Только везде, кроме знака "=" (*равно*) ставить знак " $\neq$ " (*не равно*). Так к ответу и подойдёте, со знаком неравенства:

$$x \neq 0,75$$

2. Найти наименьшее целое решение неравенства:

$$3(x - 1) < 5x + 9$$

Сначала просто решаем неравенство. Раскрываем скобки, переносим, приводим подобные...

Получаем:

$$3x - 3 < 5x + 9$$

$$3x - 5x < 9 + 3$$

$$-2x < 12$$

$$x > 12 : (-2)$$

$$x > -6$$

Ответ: -7

Алгоритм решение линейных неравенств

1. Раскрыть скобки (если нужно).
2. Неизвестные перенести в левую часть неравенства, известные в правую часть. (При переносе знаки перед слагаемыми изменить на противоположные: “-“ на “+“; “+“ на “-“; знак неравенства сохраняется).
3. В каждой части привести подобные слагаемые, получаем неравенство вида: $ax < b$ или $ax > b$ или $ax \leq b$ или $ax \geq b$.
4. Чтобы найти x , число (b), стоящее в правой части разделить на коэффициент при x (a), причём, если $a > 0$, то знак неравенства сохраняется, если $a < 0$, то знак меняется на противоположный (“<” на “>”; “>” на “<”; “ $\leq$ ” на “ $\geq$ ”; “ $\geq$ ” на “ $\leq$ ”).
5. Решение изобразить на числовой прямой и ответ записать промежутком.

$$1) 3x - 2 > 17$$

$$3x > 17 + 2$$

$$3x > 19$$

$$x > 19 : 3$$

$$x > 6\frac{1}{3}$$

Ответ: $(6\frac{1}{3}; +\infty)$

$$2) -3 - 3x > 7x - 9$$

$$-3x - 7x > -6$$

$$-10x > -6$$

$$x < -6 : (-10)$$

$$x < 0,6$$

Ответ: $(0,6; +\infty)$

$$3) \quad 3x - 2(x-5) \leq -6$$

$$3x - 2x + 10 \leq -6$$

$$x + 16 \leq 0$$

$$x \leq -16$$

Ответ: $(-\infty; -16]$

$$4) \quad \frac{x}{4} - \frac{7-2x}{3} \geq 1$$

$$3x - 28 + 8x \geq 12$$

$$11x \geq 40$$

$$x \geq 40 : 11$$

$$x \geq 3,63$$

Ответ: $[3,63; +\infty)$

$$5) \quad 10x - 2 < 0$$

$$10x < 2$$

$$x < 2 : 10$$

$$x < 0,2$$

Ответ: $(-\infty; 0,2)$

Неравенство второй степени с одной переменной

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$, где x - переменная, a,b,c -некоторые числа и $a \neq 0$, называют *неравенствами второй степени с одной переменной*.

Решить неравенство $x^2-5x+6 > 0$.

Решение.

Сначала решим квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$, любым из известных способов. Его корни равны $x=2$ и $x=3$.

Теперь разложим трехчлен x^2-5x+6 на множители. Получим:

$$(x-2)(x-3).$$

Перепишем исходное неравенство:

$$(x-2)(x-3) > 0.$$

Произведение двух сомножителей будет положительным, если оба сомножителя имеют одинаковый знак, то есть либо оба сомножителя больше нуля, либо оба сомножителя меньше нуля.

Рассмотрим два случая.

1. Оба сомножителя больше нуля. Получаем систему уравнений.

$$\{x-2 > 0$$

$$\{x-3 > 0$$

Решаем её и получаем ответ $x > 3$.

2. Оба сомножителя меньше нуля. Получаем систему уравнений

$$\{x-2 < 0$$

$$\{x-3 < 0$$

Решаем её и получаем ответ $x < 2$.

Объединяем оба полученных ответа, и записываем общий ответ.

Ответ: $2 > x > 3$.

$$1) 3x^2 - 11x - 4 < 0$$

$$a = 3 \quad D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169$$

$$b = -11 \quad \sqrt{D} = 13$$

$$c = -4 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{11+13}{6} = 4$$

$$x_2 = \frac{11-13}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $(-\frac{1}{3}; 4)$

$$2) -5x^2 - 9x + 2 < 0$$

$$a = -5 \quad D = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 2 = 81 + 40 = 121$$

$$b = -9 \quad \sqrt{D} = 11$$

$$c = -2 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{9+11}{-10} = -\frac{20}{10} = -2$$

$$x_2 = \frac{9-11}{-10} = \frac{-2}{-10} = 0,2$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0,2; \infty)$

$$3) (x-1)(x-2) \geq 0$$

$$x-1 \geq 0 \quad x-2 \geq 0$$

$$x \geq 1 \quad x \geq 2$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [2; \infty)$

$$4) x^2 - 9 \leq 0$$

$$x^2 \leq 9$$

$$x \leq \pm 3$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

$$6) \frac{-3x^2 - 6x + 9}{3} < 0$$

$$-3x^2 - 6x + 9 < 0$$

$$a = -3 \quad D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 9 = 36 + 108 = 144$$

$$b = -6 \quad D = 12$$

$$c = 9 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{6+12}{-6} = \frac{18}{-6} = -3$$

$$x_2 = \frac{6-12}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Решение неравенств методом интервалов

Решим неравенство $(x+6)(x+1)(x-4) < 0$

Отметим на координатной прямой нули функции $f(x) = (x+6)(x+1)(x-4)$

Найдём знаки этой функции в каждом из промежутков

$(-\infty; -6)$, $(-6; -1)$, $(-1; 4)$, $(4; +\infty)$



-6 -1 4

Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$.

Пример: $\frac{x+17}{x^2-x-6} \geq 0$

Решим уравнения: $x+17=0$ и $x^2-x-6=0$.

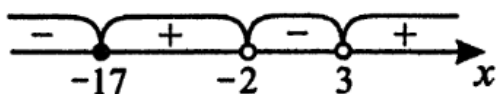
Из первого уравнения находим $x_1 = -17$.

Из второго уравнения находим $x_2 = -2$; $x_3 = 3$.

Так как неравенство нестрогое, точку $x_1 = -17$ отметим закрашенной, а точки -2 и 3 выкалим, т.к. они не подходят по ОДЗ.

Эти точки разбивают ось на 4 интервала:

$(-\infty; -17]$, $[-17; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; +\infty)$



Ответ: $x \in [-17; -2) \cup (3; +\infty)$

Решение неравенства $ax^2+bx+c > 0$ или $ax^2+bx+c < 0$

можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция $y = ax^2+bx+c$ принимает положительные или отрицательные значения. Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции

$y = ax^2+bx+c$ в координатной плоскости: куда направлены ветви параболы — вверх или вниз, пересекает ли параболу ось x и если пересекает, то в каких точках.

Пример 1. Решим неравенство $5x^2+9x-2 < 0$

Рассмотрим функцию $y=5x^2+9x-2$ — это квадратичная функция; графиком является параболa, ветви которой направлены вверх.

Выясним, как расположена эта параболa относительно оси x .

Для этого решим уравнение

$$5x^2 + 9x - 2 = 0$$

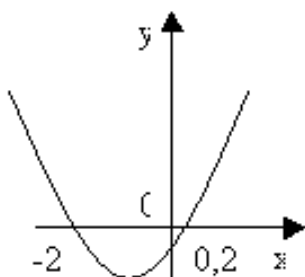
$$D = 81 + 40 = 121 > 0 \quad (2 \text{ корня})$$

$$x_1 = 0,2 \text{ и } x_2 = -2.$$

Покажем схематически, как расположена параболa в координатной плоскости.

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (0,2; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup (0,2; +\infty)$$



Алгоритм решения неравенств второй степени с одной переменной

1. Привести неравенство к виду $ax^2+bx+c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$).
2. Ввести функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$ и охарактеризовать её.
3. Найти нули функции, т.е. решить уравнение $f(x) = 0$.
4. Отметить на оси x нули функции и изобразить схематически

параболу.

5. Отметить промежутки, которые будут являться решениями данного неравенства (внимательно смотреть знак неравенства).

6. Записать ответ.

$$1. (x - 2) * (x + 7) < 0$$

$$(x - 2) * (x + 7) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -7$$

$$\text{Ответ: } (-7; 2)$$

$$2. (x + 9) * (x - 3) * (1 - x) < 0$$

$$x + 9 = 0 \quad x - 3 = 0 \quad 1 - x = 0$$

$$x = -9 \quad x = 3 \quad x = 1$$

$$\text{Ответ: } (-9; 1); \cup (3; \infty)$$

$$3. x(2x + 8) * (x - 3) > 0$$

$$x(2x + 8) * (x - 3) > 0$$

$$2x + 8 = 0$$

$$x = 0$$

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{Ответ: } (-4; 0); \cup (3; 8)$$

$$4. \frac{(x^2 + 2x - 3)}{6 + x - x^2} \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -2$$

$$x_1 * x_2 = -3$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = -1$$

$$6 + x - x^2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 * x_2 = -6$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

$$\text{Ответ: } [-3; -2]; \cup (1; 3)$$

$$5. \frac{x-1}{(x-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{x-1}{(x-2)*(x-2)} \leq 0$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1]$$

